tne restitucione sile kojom dejstvuje opruga.

Ako uz vezana klatna postavimo matematičko klatno jednakog perioda oscilovanja kao svako od nevezanih klatna, uočićemo zanimljivu činjenicu. Pre svega, uporedimo li frekvenciju oscilovanja klatna pod b. i c. sa oscilovanjem kontrolnog klatna frekvencije ω, zapazićemo da je frekvencija ω_1 istofaznog oscilovanja nešto manja od kontrolne frekvencije ω, dok je frekvencija protivfaznog oscilovanja ω_2 nešto veća od ω, tj.

$$\omega_2 > \omega > \omega_1$$

Bilo koje oscilovanje vezanih klatna može se prikazati kao zbir dva osnovna oscilovanja frekvencije ω_1 i ω_2. Ako su amplitude tih oscilovanja jednake, a oscilovanje se odvija u smeru ose x, možemo pisati

$$x = x_1 + x_2 = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) =$$

$$= 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Dobijeni izraz za elongaciju složenog oscilovanja možemo opisati na ovaj način. Kada klatno izvodi istovremeno oba oscilovanja (x_1 i x_2), ono osciluje kružnom frekvencijom $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$. Kako su ω_1 i ω_2 veoma bliski, frekvencija ω je bliska onoj kojom slobodno osciluje svako od vezanih klatna. Tu smo činjenicu uočili ranije. S druge strane, amplituda tog oscilovanja se menja vrlo polagano sa vremenom po zakonu $A\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]t$. Frekvencija te promene je veoma mala, jer su ω_1 i ω_2 bliski. Kažemo da klatno izvodi *modulirano oscilovanje*, gde je oscilovanje jednom osnovnom frekvencijom (visokom) modulirano promenljivom amplitudom niske frekvencije. U akustici se modulirano oscilovanje zvuka pod uticajem dva izvora bliske frekvencije naziva udarima.

XI MEHANIKA TEČNOSTI I GASOVA

Tečnosti i gasovi, kao tela koja mogu da "teku" jednim imenom se nazivaju fluidi. Za razliku od čvrstog tela koje ima stalan oblik i zapreminu, tečno telo ima odredjenu zapreminu, a oblik se formira prema obliku suda u kojem se nalazi, dok gasovito telo nema ni odredjen oblik niti zapreminu, već zauzima ceo prostor koji mu je ostavljen na raspolaganju. Iako se tečnosti i gasovi veoma mnogo razlikuju postoji niz osobina koje su zajedničke i za tečnosti i za gasove.

Mehanika fluida se može podeliti na hidromehaniku (koja proučava tečnosti) i aeromehaniku (koja proučava gasove). U zavisnosti od vrste kretanja mehanika fluida deli se na statiku i dinamiku. Statika proučava ravnotežu fluida, dok dinamika proučava njihovo kretanje pod dejstvom datih sila.

45. AGREGATNA STANJA

Čiste supstance se u prirodi javljaju u tri agregatna stanja: čvrstom, tečnom i gasovitom. Svako od ovih stanja karakteriše specifičan raspored atoma, odnosno molekula, što uslovljava njihove osobine. U čvrstom telu se javlja uredjenost višeg reda, jer je kinetička energija čestica (molekula, atoma ili jona) veoma mala. Privlačne sile izmedju čestica su znatno jače, čestice ne mogu da se kreću, već pravilno osciluju oko svojih strogo odredjenih položaja ravnoteže. Čvrste supstance se u prirodi javljaju kao kristalne sa tačno odredjenom unutrašnjom strukturom, i kao amorfne bez unutrašnje uredjenosti. Kod tečnosti, za razliku od čvrstih tela, atomi nemaju strogo odredjene položaje ravnoteže u prostoru, već se kreću jedan u odnosu na drugi, ali tako da je srednje rastojanje izmedju njih približno kao kod čvrstih tela. Gasovi se u prirodi nalaze u obliku dvo i više atomnih molekula (sem plemenitih gasova). Privlačne sile izmedju molekula gasa su neznatne, tako da su molekuli gasa praktično slobodni i kreću se u prostoru na velikom rastojanju jedan od drugog. Gasovi su veoma stišljivi, jer se izmedju molekula nalazi izuzetno velik prazan prostor.

A. STATIKA TEČNOSTI I GASOVA

46. PRITISAK I HIDROSTATIČKI PRITISAK

Pošto fluidi nemaju stalan oblik mogu da se pomeraju u prostoru samo ako sila deluje na konačan deo njihove površine. Zato je neophodno da se umesto sile koristi fizička veličina koja karakteriše stanje fluida, a koja se zove pritisak. Pritisak definišemo kao odnos normalne sile dF_n koja deluje na površinu nekog tela i elementarne površine dS

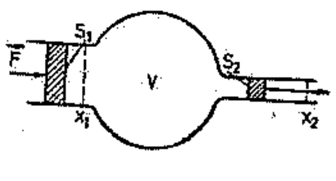
$$p = \frac{dF_n}{dS} \qquad (46.1)$$

Pritisak je skalarna veličina i izražava se u *Pa* (Paskal). *1 Pa = 1 N/m²*.

Ako je pritisak konstantan u svakoj tački površine, jednačina (46.1) svodi se na

$$p = \frac{F}{S};\ F = pS \qquad (46.2)$$

Pritisak na nekom mestu u tečnosti može da potiče od težine same tečnosti, ili od delovanja spolja. Mi ćemo posmatrati prenošenje spoljašnjeg pritiska na deo tečnosti koji se nalazi u sudu proizvoljnog oblika sa dva cilindra (sl. 46.1), zanemarujući pri tome samu težinu tečnosti i pretpostavljajući da je tečnost nestišljiva (V = *const.*). Sila $\vec{F}$ deluje na klip površine S_1 i pomera ga za dužinu x_1, te vrši rad (zanemarujući trenje)



Sl. 46.1

$$A_1 = Fx_1 = p_1S_1x_1 \qquad (46.3)$$

Slojevi tečnosti će pod pritiskom p_1 morati da se pomere iz svog položaja, te će vršiti pritisak na zidove suda i na drugi klip površine S_2, koji će se zbog nestišljivosti tečnosti pomeriti za neku dužinu x_2. Na klipu površine S_2 se vrši isto rad

$$A_2 = A_1 = p_2S_2x_2 \qquad (46.4)$$

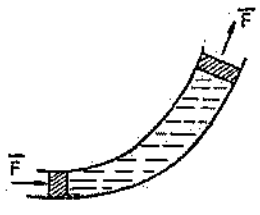
Kako zapremina pomerene tečnosti u prvom cilindru S_1x_1 mora biti jednaka zapremini S_2x_2, tj.

$$S_1x_1 = S_2x_2 \qquad (46.5)$$

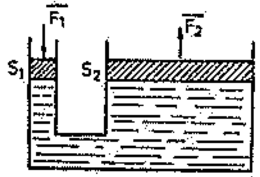
sledi da je prema (46.3) i (46.4)

$$p_1 = p_2 \qquad (46.6)$$

Na osnovu (46.6) sledi Paskalov* zakon: *Pritisak koji se spolja vrši na neku tečnost prenosi se kroz nju nesmanjenim intenzitetom na sve strane podjednako.* Znači, pomoću tečnosti u zatvorenom sudu moguće je menjati smer, pravac i intenzitet sile (sl. 46.2).



Sl. 46.2



Sl. 46.3

Hidraulična presa (sl. 46.3) je jednostavna ilustracija praktične primene Paskalovog zakona. Ovaj uredjaj služi za multiplikaciju sile. Klip malog preseka S_1 deluje silom F_1 na tečnost. Po Paskalovom zakonu (46.6) pritisak $p = F_1/S_1$ pre-

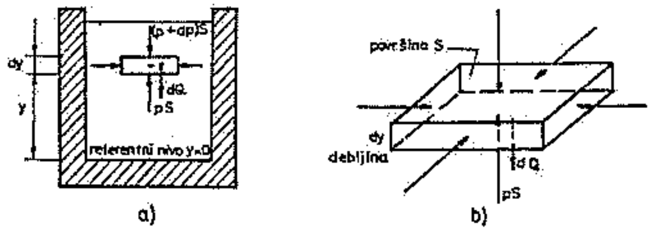
---

* *Blaise Pascal (1623-1662), francuski matematičar, fizičar i pisac. Prvi deo života Paskal je posvetio matematici (teorija verovatnoće) i fizici (zakon pritiska u fluidima, hidraulična presa). Godine 1654. Paskal je primio red Jansenista i posvetio se problemima filozofije i morala.*

nosi se kroz tečnost na sve strane, pa i na klip velikog preseka S_2, na koji sada deluje ukupna sila $F_2 = pS_2$. Očito je prema (46.6) $F_1/S_1 = F_2/S_2$, pa je

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \qquad (46.7)$$

Gravitaciono polje deluje na svaku česticu tečnosti. Jasno je onda da u tečnostima postoji pritisak koji se javlja usled težine same tečnosti. Svaki delić tečnosti svojom težinom vrši pritisak na deliće koji se nalaze ispod njega, tako da pritisak raste sa dubinom. Ako tečnost smatramo nestišljivom, onda će i njena zapreminska masa ρ biti konstantna pri stalnoj temperaturi. U takvim uslovima može se lako doći do zakona po kome pritisak u nekoj tečnosti raste sa dubinom. Posmatrajmo elemenat fluida u obliku prizme visine dy i baze S (sl. 46.4.a).



Sl. 46.4

Ako sa ρ označimo zapreminsku masu fluida, tada je masa posmatranog elementa fluida jednaka $\rho S dy$, a težina $\rho g S dy$. Sile koje deluju na posmatrani elemenat fluida prikazane su na slici 46.4.b. Horizontalne sile koje deluju na strani elementa fluida medjusobno se poništavaju. Vertikalne sile prema dole na gornjoj bazi i prema gore na donjoj bazi deluju normalno na površinu elementa. Prema dole deluju sile $(p + dp)S$ i težina elementa $dQ = \rho g S dy$, a prema gore sila pS. Kako element miruje, mora biti ispunjen uslov da je $\sum_i \vec{F}_i = 0$, odnosno

$$pS - (p + dp)S - \rho g S dy = 0$$

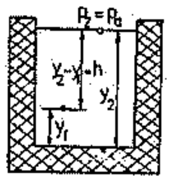
ili

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \qquad (46.8)$$

Izraz (46.8) predstavlja diferencijalnu jednačinu za promenu pritiska sa dubinom. Njeno rešenje je linearna funkcija. Integralimo li jednačinu (46.8) u granicama od p_1 do p_2 za p od y_1 do y_2 za y dobićemo

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \qquad (46.9)$$

Za slučaj prikazan na slici 46.5., gde se tečnost nalazi u otvorenoj posudi, položaj 1 neka bude proizvoljna tačka u posudi, a položaj 2 neka bude površina posude. Tada je $p_2 = p_0^*$, $p_1 = p$, a $y_2 - y_1 = h$ dubina na kojoj merimo pritisak. Tada jednačina



Sl. 46.5

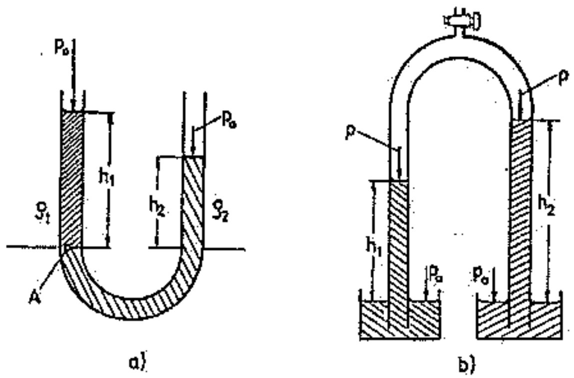
(46.9) postaje

$$p_0 - p = -\rho gh$$

odnosno

$$p = p_0 + \rho gh \qquad (46.10)$$

Jednačina (46.10) predstavlja izraz za veličinu hidrostatičkog pritiska u fluidu. Pomoću jednačine za hidrostatički pritisak (46.10) možemo izračunati zapreminske mase fluida u spojenim posudama. Ako se u posudi u obliku slova U (sl. 46.6.a) nalaze dve tečnosti koje



Sl. 46.6

*p_0 je atmosferski pritisak.

se ne mešaju (npr. živa i voda) zapreminskih masa ρ_1 i ρ_2, tada će na granici tečnosti (tačka A na sl. 46.5.a) pritisci biti izjednačeni. Ako su h_1 i h_2 visine odgovarajućih tečnosti, tada je

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

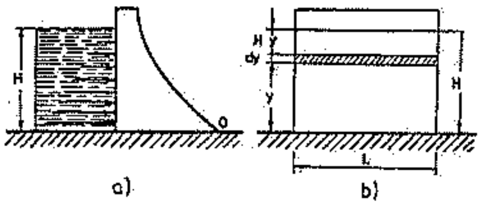
Kako je atmosferski pritisak p jednak sa obe strane to je

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} \qquad (46.11)$$

tj. zapreminske mase se odnose obrnuto visinama, tako da će tečnost veće zapreminske mase imati niži nivo. Mereći h_1 i h_2 i znajući ρ jedne tečnosti možemo iz (46.11) izračunati zapreminsku masu druge tečnosti.

Za odredjivanje zapreminske mase tečnosti koje se mešaju koristi se okrenuta U cev (hidrometar) (sl. 46.6.b) sa kracima potopljenim u tečnost. Delimičnim izvlačenjem vazduha iz cevi pomoću pumpe kroz otvor O pritisak u cevi se smanjuje od atmosferskog p_0, na neki pritisak p, zbog čega se tečnost u cevima penje do nekih visina h_1 i h_2. U tom položaju atmosferski pritisak p_0 koji deluje na slobodne površine tečnosti u oba suda stoji u ravnoteži sa pritiskom p koji deluje na obe površine u cevi, plus hidrostatički pritisak stuba tečnosti visine h_1 i h_2, mereći od površine tečnosti u spoljašnjem sudu. Prema tome, pišemo $p_0 = p + \rho_1 g h_1 = p + \rho_2 g h_2$, odakle sledi izraz identičan (46.11).

Pomoću (46.10) možemo izračunati i horizontalnu silu koja deluje na branu visine H i širine L (sl. 46.7).



Sl. 46.7

Pritisak na visini y od dna brane iznosi

$$p = \rho g(H - y)$$

Sila na horizontalnu prugu širine L i visine dy je

$$dF = pdS = \rho g(H - y)Ldy$$

pa je ukupna sila

$$F = \int dF = \int_0^H \rho g L(H - y)dy = \frac{1}{2}\rho g L H^2$$

Rezultantna sila nastoji prevrnuti branu momentom sile F oko podnožja O

$$M = \int dM = \int_0^H \rho g L y(H - y)dy = \frac{1}{6}\rho g L H^3$$

Ako je $\overline{H}$ visina iznad O, na kojoj bi ukupna sila trebalo da deluje da bi proizvela ovaj momenat, onda je

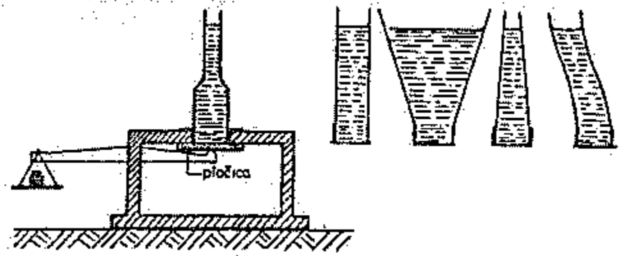
$$M = F\overline{H}$$

ili

$$\frac{1}{6}\rho g L H^3 = \frac{1}{2}\rho g L H^2 \overline{H} \text{ odnosno } \overline{H} = \frac{1}{3}H$$

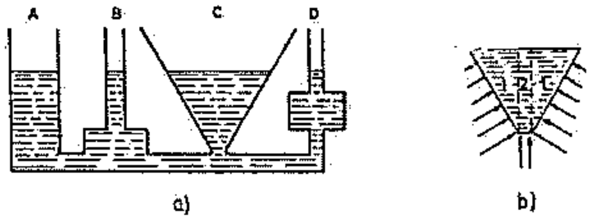
Znači, linija dejstva rezultante je na 1/3 dubine iznad O ili na 2/3 dubine ispod površine.

Iz jednačine (46.10) proizilazi da pritisak u fluidu zavisi samo od dubine h a nikako od ukupne količine, odnosno težine u sudu. On ne zavisi od oblika posude u kojoj se nalazi fluid. Ta činjenica predstavlja tzv. *hidrostatički paradoks*. Ovaj paradoks se može demonstrirati pomoću tzv. hidrostatičke vage (sl. 46.8). Na jedan krak vage pričvršćena je pločica sa gumom, na koju naležu posude različitog oblika, ali iste površine dna S i u njih se naliva voda do iste visine od dna. Na drugom kraku vage stavljaju se tegovi dok se ne postigne ravnoteža. Vaga prema tome meri silu kojom fluid u posudama različitog oblika deluje na dno. Uverićemo se da je sila u svakom sudu ista, a otuda i pritisak na dno, jer je S isto u svim slučajevima



Sl. 46.8

(F = pS). Ako se izvestan broj sudova različitih oblika medjusobno poveže, kao na slici 46.9.a. tečnost koja se sipa u njih



Sl. 46.9

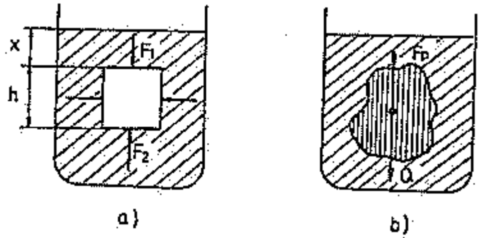
imaće isti nivo u svakom sudu. Na prvi pogled bi izgledalo, na primer, da bi na dno suda C trebalo da dejstvuje veći pritisak nego na dno suda B i da bi tečnost iz C trebalo da prelazi u B. Medjutim, kako prema (46.10) pritisak zavisi samo od visine, to će u svim sudovima tečnost na dno suda delovati istom silom, bez obzira što su količine tečnosti u sudovima različite. Na prvi pogled ovakva pojava je paradoksalna, te se zato naziva hidrostatički paradoks.

Podrobnije objašnjenje može da bude korisno u razumevanju ove pojave, jer se radi o rasporedu sila. Tako kod

suda C (sl. 46.9.b) sile kojima zidovi dejstvuju na tečnost prikazane su strelicama i svuda su normalne na zidove suda. Te sile mogu se razložiti na horizontalne i vertikalne komponente. Težinu tečnosti u odeljcima obeleženim sa 1 uravnotežuju vertikalne komponente ovih sila. Ostaje da težina tečnosti u odeljku obeleženom sa 2 vrši samo pritisak na dno suda. Na isti način može se analizirati raspored sila kod svakog suda bez obzira na oblik.

47. POTISAK. ARHIMEDOV ZAKON

Na sva tela potopljena u tečnost deluje sila koja je suprotnog smera od gravitacione i koja teži da istisne telo iz tečnosti. Ova sila zove se potisak. Potisak je posledica činjenice da hidrostatički pritisak raste sa dubinom. Kvalitativno, potisak možemo objasniti na primeru prikazanom na slici 47.1. Predmet u obliku kocke uronjen je u tečnost. Sile priti-



Sl. 47.1

ska koje deluju sa bočne strane se poništavaju, tako da ostaje dejstvo vertikalnih sila pritiska F_1 i F_2. Kako se donja osnova na koju deluje sila F_2 nalazi na većoj dubini, to je i hidrostatički pritisak na nju veći. Prema tome, na telo će delovati rezultanta sila, sila potiska F_p, prema gore koja je jednaka razlici sila F_2 i F_1, tj.

$$F_p = F_2 - F_1 \tag{47.1}$$

Prema relacijama (46.2) i (46.10), ako je površina osnove kocke S, može se napisati da je

$$F_1 = p_1 S = (p_0 + \rho g x)S$$
$$F_2 = p_2 S = [p_0 + \rho g(x + h)]S \qquad (47.2)$$

te je prema (47.1) sila potiska

$$F_p = \rho g h S \qquad (47.3)$$

Kako je $\rho g = \sigma$ zapreminska težina tečnosti, a $hS = V$ zapremina kocke, to proizvod $\rho g h S = V\sigma$ predstavlja težinu kockom istisnute tečnosti koja ima istu zapreminu kao i kocka. Znači, na kocku zaronjenu u tečnost deluje sila potiska koja je jednaka težini istisnute tečnosti, a usmerena je suprotno od sile težine Q.

$$F_p = \rho g V = \sigma V \qquad (47.4)$$

Analiza koju smo dali za kocku važi i za telo ma kakvog oblika (sl. 47.1.b).

Jednačina (47.4) može se izreći i na ovaj način: *Svako telo uronjeno u tečnost gubi od svoje težine toliko koliko teži istisnuta tečnost.* Ovaj princip otkrio je Arhimed* koji je tražio način da odredi procenat zlata u kruni kralja Hierona. Zato se ovaj princip zove Arhimedov zakon. Potisak, naravno, ne postoji samo u tečnostima nego i u bilo kojem fluidu, na primer, u vazduhu. Na telo prikazano na slici 47.1.b. deluje sila potiska F_p tako da efektivna težina tela zaronjenog u fluid na osnovu Arhimedovog zakona (47.4) biće

$$Q_{ef} = Q - F_p = Vg(\rho_t - \rho_f) \qquad (47.5)$$

tj. telo prividno gubi deo svoje težine. Analizom jednačine (47.5) može se zaključiti da:

---

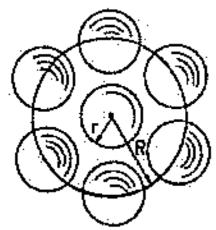
* *Arhimed (287-212. godine pre n.e.), grčki matematičar, fizičar i pronalazač. Osim pomenutog zakona otkrio je zakone poluge i jednostavnih mehanizama. U matematici je postavio formule za izračunavanje površine i zapremine lopte i valjka.*

1. telo tone ako je $\rho_t > \rho_f$, tada je $Q > F_p$
2. telo lebdi ako je $\rho_t = \rho_f$, tada je $Q = F_p$
3. telo pliva na površini $\rho_t < \rho_f$, tada je $Q < F_p$

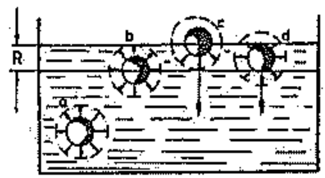
Ovi zaključci važe i za nehomogena tela ako se računa sa njihovom srednjom zapreminskom masom $\bar{\rho}$. Znači, brod može da pliva po površini vode ako mu je srednja zapreminska masa manja od zapreminske mase vode.

48. POVRŠINSKI NAPON

Izmedju molekula tečnosti deluju složene sile koje drže molekule tečnosti na stalnom uzajamnom rastojanju, gusto smeštene u prostoru. Dejstvo medjumolekularnih sila sa rastojanjem brzo opada. Smatra se da je dejstvo medjumolekularnih privlačnih sila ograničeno sferom poluprečnika R, koji približno odgovara sferi trostrukog poluprečnika molekula r ($R \approx 3r$). Ova sfera se naziva sfera molekularnog dejstva (sl. 48.1). Na svaki molekul u unutrašnjosti tečnosti (sl. 48.2) deluju privla-



Sl. 48.1

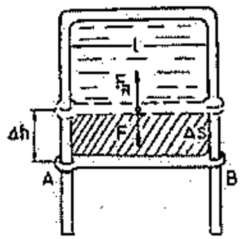


Sl. 48.2

čne sile susednih molekula. Ako se molekul nalazi ispod slobodne površine tečnosti na rastojanju $d \geq R$ rezultanta svih medjumolekularnih sila jednaka je nuli, jer one deluju simetrično sa svih strana molekula (npr. molekuli a i b, sl. 48.2.). Ako se molekuli nalaze u blizini slobodne površine tečnosti na rastojanju $d < R$ (npr. molekuli c i d, sl. 48.2.) privlačne sile neće se poništavati, jer više ne deluju simetrično. U ovom slučaju veći broj molekula deluje iz unutrašnjosti tečnosti i rezultanta je upravljena prema unutrašnjosti tečnosti i to normalno na površinu tečnosti. Usled toga tečnost teži da smanji svoju slobodnu površinu, pa se ponaša kao zategnuta membrana i teži da zauzme sferni oblik. Ova slobodna površina se može povećati ulaganjem rada ΔA. Rad ΔA je upravo srazmeran novonastaloj površini ΔS, tj.

$$\Delta A = \gamma \Delta S \qquad (48.1)$$

gde je γ konstanta srazmernosti i naziva se koeficijent površinskog napona. Izvršeni rad ΔA ekvivalentan je povećanju potencijalne energije granične površine. Znači, površinski napon se suprotstavlja povećanju slobodne površine tečnosti, usled čega tečnost teži da zauzme najmanju površinu koja odgovara minimumu potencijalne energije. Koeficijent površinskog napona može se eksperimentalno izmeriti, pomoću pravougaonog rama od žice (sl. 48.3) sa pokretnim krajem AB. Premaže li se ram sapunicom, obrazovaće se unutar okvira opna. Rezultanta sila dejstva površinskog napona F_R povlači pokretnu stranu rama AB na gore kako bi opna smanjila površinu. Dejstvom sile F može se savladati sila površinskog napona F_R i uspostaviti ravnoteža. Pomeranjem pokretne strane AB, dužine l na putu Δh sila F izvrši rad



Sl. 48.3

$$\Delta A = F\Delta h \qquad (48.2)$$

Obzirom da tečna opna ima dve površine (prednju i zadnju) na kojoj deluje površinski napon, to se rad sile F odnosi na dvostruku promenu površine, tj. $\Delta S = 2l\Delta h$. Prema tome, imajući u vidu obrasce (48.1) i (48.2), sledi da je rad

$$F\Delta h = \gamma 2l\Delta h \qquad (48.3)$$

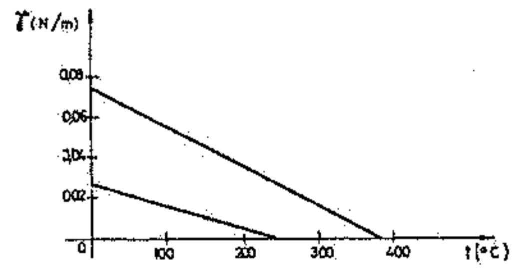
odnosno

$$\gamma = \frac{\Delta A}{\Delta S} \quad \text{ili} \quad \gamma = \frac{F}{2l} \qquad (48.4)$$

Znači da se koeficijent površinskog napona γ prema (48.4) može definisati kao rad potreban da se slobodna površina tečnosti poveća za jedinicu ili kao sila koja deluje na jedinicu dužine kraja površine opne tečnosti. Koeficijent površinskog napona u SI se izražava kao J/m^2 ili N/m.

Površinski napon zavisi od prirode tečnosti i od temperature. S povišenjem temperature površinski napon opada i na kritičnoj temperaturi će biti jednak nuli. Ova činjenica se objašnjava time što na kritičnoj temperaturi nestaju razlike između tečnog i gasovitog stanja. Na slici 48.4. prikazana je zavisnost koeficijenta površinskog napona od temperature za vodu i alkohol.

Kada se govori o površinskom naponu mora se voditi računa i o materijalu sa kojim se graniči tečnost, jer obzirom na objašnjenje ovog efekta, jasno je da će broj i vrsta molekula iznad granične površine uticati na vrednost koeficijenta γ.



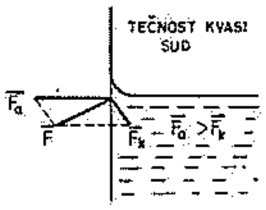
Sl. 48.4

Ako nije posebno naglašeno, vrednosti površinskog napona se odnose na savršeno čiste tečnosti u dodiru sa vazduhom.

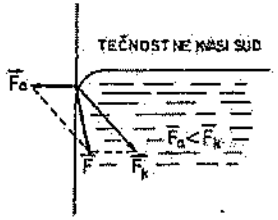
Rastvorene supstance dejstvuju na površinski napon dvojako. Većina rastvorenih supstanci, a naročito elektroliti, nagomilavaju se pri rastvaranju u dubini rastvora i povećavaju površinski napon, pošto sada na molekule na površini iz dubine tečnosti dejstvuju ne samo sile molekula rastvarača, nego i privlačne sile rastvorenih čestica (molekula odnosno jona). Medjutim, izvesne supstance koje u sebi sadrže radikale koji su nerastvorljivi u vodi, znači hidrofobni, na primer, žučne kiseline ili sapuni, nagomilavaju se na površini i snižavaju površinski napon. Snižavanje površinskog napona pod uticajem žučnih kiselina omogućuje stvaranje finih emulzija u crevima čime je omogućeno dejstvo lipaze na masti.

49. UTICAJ MOLEKULARNIH SILA NA OBLIK POVRŠINE NA GRANICI TEČNOSTI I ČVRSTOG TELA. KAPILARNOST

Pri dodiru tečnih i čvrstih tela javljaju se razni efekti koji nastaju, ne samo zbog sila privlačenja izmedju molekula tečnosti već i zbog uzajamnog dejstva izmedju različitih molekula tečnosti i čvrstog tela. Privlačne sile medju molekulima iste vrste se zovu kohezionim silama. Medju različitim molekulima vladaju athezione sile. Od odnosa ovih sila zavise pojave koje se javljaju na ivici spoja tečnosti sa sudom (sl. 49.1. i 49.2.). Rezultanta sila kohezije $\vec{F}_k$ i athezije $\vec{F}_a$ nor-



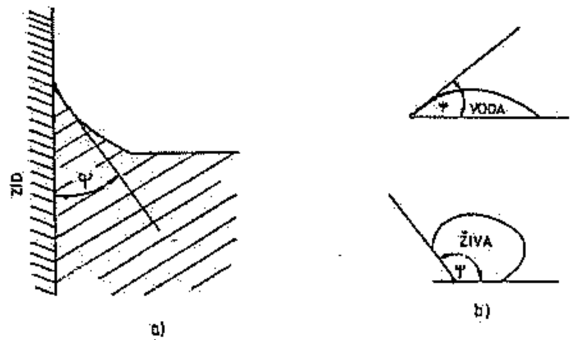
Sl. 49.1



Sl. 49.2

malna je na graničnu površinu tečnosti. Ova se površina naziva meniskus. U slučaju kada je $\vec{F}_a > \vec{F}_k$ kaže se da tečnost kvasi čvrsto telo (na primer, voda i staklo), a kada je $\vec{F}_k > \vec{F}_a$ tečnost ne kvasi čvrsto telo (na primer, živa i staklo) . Ugao koji zaklapa zid čvrstog tela sa tangentom na površinu tečnosti uz granicu zida naziva se granični ugao (sl. 49.3.a). Taj ugao se meri kroz tečnost. Ako je granični ugao ψ manji od 90^0

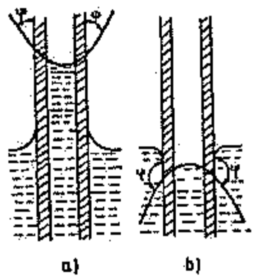
kažemo da tečnost kvasi čvrstu površinu, a ako je veći od 90^0 ne kvasi čvrstu površinu (sl. 49.3.b). Ako je ψ = 0^0 nastupa



Sl. 49.3

potpuno kvašenje (voda - staklo), a kada je ψ = 180^0 potpuno nekvašenje (živa - staklo).

Direktna posledica opisane pojave na granici čvrsto telo tečnost je kapilarnost. To je pojava da se tečnost u uskim kapilarnim cevima (prečnik manji od 1 *mm*) ne ponaša po zakonu spojenih sudova, već je iznad ili ispod slobodne površine (sl. 49.4) u zavisnosti da li je tečnost kvasila zid kapilare ili nije. Ako tečnost kvasi zidove kapilare, nivo tečnosti u kapilari je viši od nivoa tečnosti u sudu (kapilarna atrakcija) (sl. 49.4.a), ili kada tečnost ne kvasi zidove kapilare, nivo u kapilari je niži (kapilarna depresija) (sl. 49.4.b).



Sl. 49.4

Analizirajmo slučaj kada tečnost potpuno kvasi zid kapilare. Očigledno je da se tada tečnost u kapilari penje. Tečnost se penje u kapilari sve dotle dok se sila površinskog napona F koja deluje po obimu meniska ne izjednači sa težinom Q stuba tečnosti u kapilari (sl. 49.5), tj.

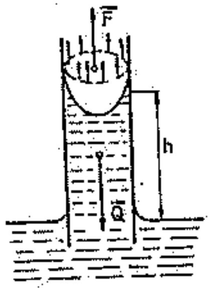
$$F = Q \tag{49.1}$$

Kako sila površinskog napona deluje po obimu meniska uz kapilaru, čiji je obim $2\pi r$, to je ukupna sila koja dejstvuje duž celog obima (prema 48.4) $F = \gamma 2\pi r$. Težina stuba tečnosti visine h u kapilari je $Q = mg$. Kako je $m = \rho V = \rho r^2\pi h$ to je $Q = \rho g r^2 \pi h$. Prema jednačini (49.1) biće

$$2r\pi\gamma = \rho g r^2 \pi h \tag{49.2}$$

odakle je

$$\gamma = \frac{1}{2}\rho g h r \tag{49.3}$$



Sl. 49.5

Izraz (49.3) može da se koristi za odredjivanje koeficijenta površinskog napona merenjem visine stuba tečnosti h kao i poluprečnika kapilare r.

Kapilarne pojave imaju veliki značaj u prirodi, tehnici i svakodnevnom životu. Kapilarne sile dejstvuju pored sila osmoze pri penjanju biljnih sokova od korena prema listu. Ulje se širi na vodi usled molekularnih sila koje dejstvuju izmedju molekula vode i ulja i gradi pri tome jedan vrlo tanak sloj koji se pod dejstvom sila površinskog napona može razvući i do debljine monomolekularnog sloja ulja. Na pojavi kvašenja i nekvašenja zasniva se u tehnici tehnološki postupak flotacije.

50. ZEMLJINA ATMOSFERA I TEŽINA VAZDUHA

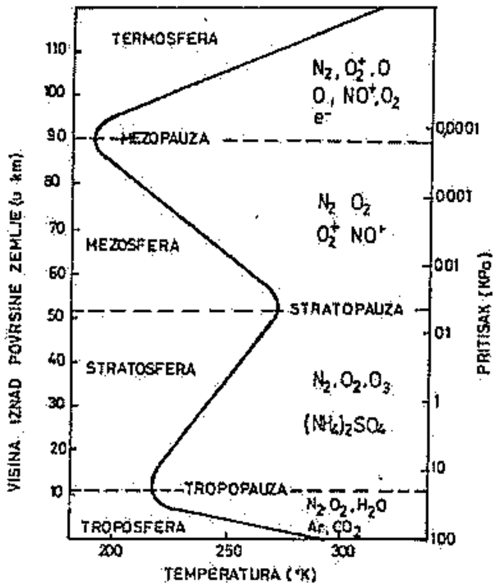
Pod Zemljinom atmosferom podrazumeva se vazdušni omotač koji je opkoljava. Danas se pouzdano zna da je debljina Zemljine atmosfere ispod 200 *km*, jer na toj visini veštački sateliti mogu da lete bez znatnog otpora vazduha. Smatra se da oko 99,999% ukupne mase atmosfere (oko $5{,}1\cdot 10^{18}$ *kg*) nalazi

unutar 90 *km* iznad Zemljine površine. Sa stanovišta održavanja života atmosfera ima veoma važnu ulogu. Ona snabdeva živi svet kiseonikom za disanje, ugljen-dioksidom za fotosintezu u zelenim biljkama, ozonskim slojem kao zaklonom od smrtonosnih ultravioletnih zraka, padavinama (kiša, sneg itd.), koje natapaju kontinente i izolacijom od hladnog svemira.

Gasovi koji čine atmosferu podvrgnuti su dejstvu sila Zemljine teže. Nasuprot ovom dejstvu, usled haotičnog kretanja molekula, gas teži da se po celom prostoru ravnomerno rasporedi. Kao rezultanta dejstva ova dva suprotna procesa uspostavlja se izvesna termodinamička ravnoteža, pri kojoj pritisak i zapreminska masa gasa opadaju sa porastom visine. Zemljina atmosfera je smeša gasova koja (na nivou mora) sadrži 78% azota, 21% kiseonika, 0,9% argona, 0,02% ugljendioksida itd.

Temperatura atmosfere zavisi od stepena apsorpcije Sunčevog zračenja i od načina prenošenja energije (elektromagnetno zračenje, konvekcija, isparavanje itd.) izmedju okeana, atmosfere i površine kontinenata. Zbog toga temperatura nije konstantna, nego se menja sa visinom, geografskom širinom, godišnjim dobom, oblačnošću i sl. Znatna varijacija temperature sa visinom čini jedan od osnova za podelu atmosfere u slojeve. Na slici 50.1., koja predstavlja približni temperaturni profil atmosfere, prikazano je nekoliko slojeva. Sloj najbliži površini Zemlje naziva se troposfera, gde temperatura opada sa visinom prosečno za oko -9,8 *K/km*. Troposfera sadrži oko 90% ukupne mase atmosfere i u njoj se javljaju usled konvekcije vertikalna i horizontalna strujanja. Najveći deo atmosferske vode (oblaka) se nalazi u ovom sloju. Visina troposfere se kreće oko 16 *km* u tropskim oblastima, odnosno 10 *km* na većim geografskim širinama. Iznad ovih visina temperatura za kratko ostaje konstantna (tropopauza), a onda počinje da raste sa visinom u sloju koji se zove stratosfera. Kako temperatura raste sa visinom vertikalno mešanje je vrlo sporo, pa stratosfera predstavlja stabilan deo atmosfere. Materijali ubačeni u stratosferu ostaju na datoj visini godinama, iako se za to vreme mogu preneti mnogo puta oko

Zemljine kugle visinskim vetrovima. Vazduh u stratosferi je vr-

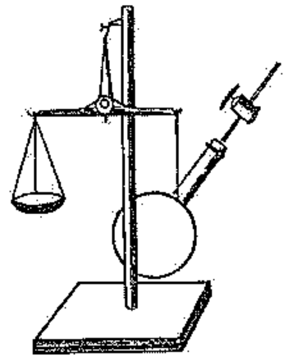


Sl. 50.1

lo suv. Oblaci i konvekcione struje iz troposfere ne prodiru lako u nju. Temperatura stratosfere raste do visine od približno 50 *km*, gde dostigne vrednosti slične temperaturama na površini Zemlje (stratopauza). Medjutim, iznad te visine temperatura počinje ponovo da opada i u oblasti koji se naziva mezosfera dostiže najnižu tačku (oko 180 *K* na visini od oko 90 *km* - mezopauza). U sledećem sloju, termosferi, temperatura naglo počinje da raste sa visinom i penje se do vrlo visokih vrednosti, pri kojima dolazi do jonizacije gasa, pa se taj sloj ponekad naziva jonosferom.

Da gasovi imaju svoju težinu možemo se uveriti na taj način što ćemo prvo pomoću osetljivih terazija (sl. 50.2) odrediti njihovu masu. Stakleni balon sa otvorenom slavinom okači se za jedan krak poluge terazija i uravnoteži sa tegovi-

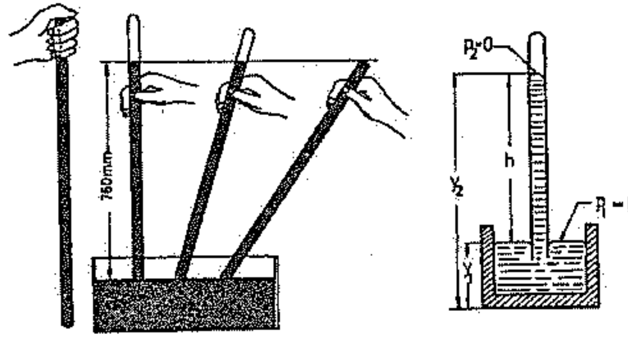
ma. Zatim se pomoću vakuum pumpe razredi vazduh u balonu i slavina zatvori. Balon će postati lakši i ravnoteža će se poremetiti tako da tegovi prevagnu, što znači da gas ima svoju masu. Kako je zapremina gasa (balona) ostala nepromenjena, to izlazi da je u razredjenom gasu zapreminska masa manja, odnosno da zavisi od pritiska. Znajući m i V vazduha može se odrediti njegova zapreminska masa. Tako na nivou mora dobija se $\rho = 1{,}29\ kg/m^3$, što je 1/766 deo zapreminske mase vode.



Sl.50.2

51. ATMOSFERSKI PRITISAK

Svа tela na Zemlji zaronjena su u atmosferu koja na njih vrši odredjen pritisak usled sopstvene težine. Taj pritisak se naziva atmosferski pritisak. Njega je prvi dokazao i izmerio Toričeli* 1643. godine. Taj eksperiment, koji je temelj barometra, prikazan je na slici 51.1.a. Toričeli je uzeo stakle-



a) b)

Sl. 51.1

---

* *Evangelista Torricelli (1608-1647) italijanski fizičar i matematičar.*

nu cev zatopljenu na jednom kraju, napunio je živom do vrha i zatim uronio u posudu sa živom. Živa se u cevi nije spustila na nivo žive u posudi, nego je ostala na visini h odprilike 760 *mm*. Označimo li razlike žive u posudi i cevi sa y_1 odnosno y_2 (sl. 51.1.b), tada prema (46.10), za tačku na dnu posude važi

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

Leva strana je hidrostatički pritisak koji dolazi od žive u posudi, a desna hidrostatički pritisak koji dolazi od žive u praznoj cevi. Gornja jednačina pokazuje da su ti pritisci u ravnoteži, jer živa u posudi miruje. Spoljašnji pritisak p_1 je medjutim atmosferski pritisak p_0, dok je $p_2 = 0$, jer je cev iznad žive prazna. Prema tome je

$$p_0 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h \qquad (51.1)$$

gde je ρ - zapreminska masa žive, a h visina stuba žive u cevi koja je nezavisna od položaja cevi (sl. 51.1.a). Na osnovu izraza (51.1) dobijena je vrednost atmosferskog pritiska na nivou mora p_0 = 101 337 *Pa*.

Sa povećanjem nadmorske visine menja se i atmosferski pritisak. Pretpostavimo da na površini Zemlje pritisak ima vrednost p_0, a zapreminska masa vazduha neka je ρ_0. Pritisak se menja po zakonu

$$dp = - \rho g dh \qquad (51.2)$$

Ako pretpostavimo da je atmosfera izotermna, tj. da se temperatura ne menja sa visinom h, (što je gruba aproksimacija) tada je

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad (51.3)$$

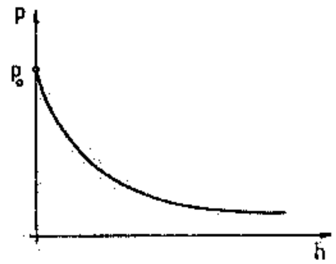
Kombinacijom (51.2) i (51.3) dobija se

$$dp = - \frac{\rho_0}{p_0} p g dh \qquad (51.4)$$

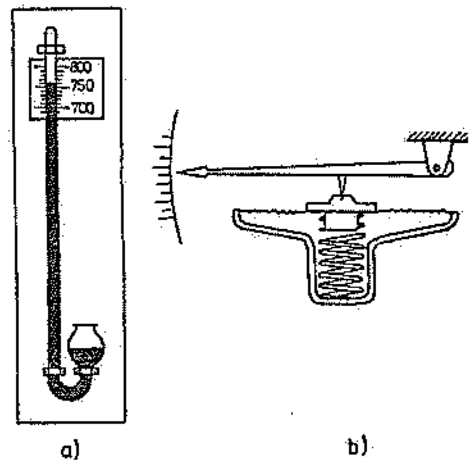
što integraljenjem daje tzv. barometarsku formulu

$$p = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gh} \quad . \qquad (51.5)$$

Dobijena formula (51.5) pokazuje da se atmosferski pritisak smanjuje eksponencijalno sa povećanjem visine (sl. 51.2). Instrumenti



Sl. 51.2



Sl. 51.3

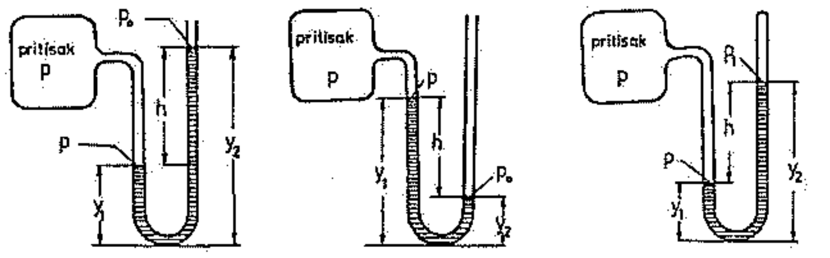
kojima se meri atmosferski pritisak nazivaju se barometri. U upotrebi su najčešće dva tipa i to barometar sa živom (sl. 51.3.a) i metalni koji se zove aneroid (sl. 51.3.b). Barometri, odnosno barografi koji služe za merenje visine, zovu se altimetri i imaju osim skale za pritisak i skalu za visinu.

52. PRITISAK GASA. MANOMETRI

Usled haotičnog kretanja, stalni sudari molekula gasa sa zidom suda uzrok su pritiska gasa na zid ili na bilo koju površinu unutar gasa. Pritisak gasa zavisi od broja sudara u jedinici vremena, tj. od zapreminske mase i od temperature na kojoj se nalazi. Instrumenti za merenje pritiska nazivaju se manometri. U upotrebi su najčešće otvoreni, zatvoreni i metalni manometar.

Otvoreni manometar sastoji se od jedne otvorene

U-cevi koja najčešće sadrži živu (sl. 52.1). Jedan kraj cevi



a) b) c)

Sl. 52.1

spaja se sa sudom u kojem se pritisak p meri, a drugi je otvoren te na njega deluje atmosferski pritisak p_0. Ako je $p>p_0$ (sl. 52.1 tada pritisak u sudu potiskuje živu u odgovarajućem kraku sve dok se ne uspostavi ravnoteža. Tada iz uslova ravnoteže na dnu U-cevi važi

$$p + \rho g y_1 = p_0 + \rho g y_2$$

odnosno

$$p - p_0 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h \qquad (52.1)$$

Veličina p naziva se još i apsolutni pritisak, dok se razlika $p - p_0$, koja se čita na manometru, naziva manometarski pritisak.

Ako je $p < p_0$ (sl. 52.1.b), odgovarajuća ravnoteža nastupa kada je

$$p_0 - p = \rho g h \qquad (52.2)$$

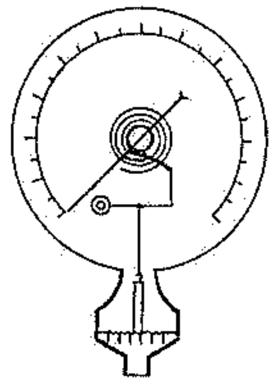
Prema (52.1) i (52.2) uz poznatu vrednost atmosferskog pritiska p_0 i merenjem visine h moguće je da se izmeri pritisak p pomoću otvorenog manometra.

Zatvoreni manometar ima jedan krak cevi zatvoren (sl. 52.1.c) i služi za merenje pritisaka većih od atmosferskog. U zatvorenom kraku nalazi se izvesna količina gasa čija zapremina zavisi od pritiska p koji se meri. Ako je u ravnotežnom

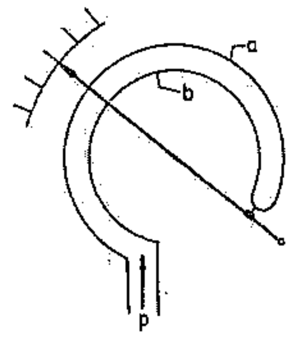
stanju pritisak gasa u zatvorenom kraku p_1 tada je manometarski pritisak

$$p - p_1 = \rho g h \qquad (52.3)$$

U praksi se najviše upotrebljavaju za merenje pritisaka metalni manometri načinjeni poput aneroida. Kod metalnih manometara sa membranom (sl. 52.2) pritisak gasa potiskuje mem-



Sl. 52.2



Sl. 52.3

branu i prenosi se na kazaljku, koja na baždarenoj skali pokazuje pritisak. Kod manometra na cev (Burdonov manometar) (sl. 52.3) pritisak deluje sa unutrašnje strane elastične metalne cevi eliptičnog poprečnog preseka i nastoji da je ispravi, jer je spoljašnja strana cevi a veće površine od unutrašnje strane b, pa na nju deluje i veći pritisak. Pomeranje slobodnog kraja cevi prenosi se na kazaljku koja na skali pokazuje pritisak. Burdonov manometar koristi se za merenje velikih pritisaka. Veoma niski pritisci mere se pomoću jonizacionih vakuum-metara.

B. DINAMIKA TEČNOSTI I GASOVA

U ovom ćemo poglavlju analizirati svojstva fluida u kretanju. Treba pri tome imati u vidu da ova oblast pripada onim granama fizike, koje koriste veoma komplikovan matematičk aparat, pa se proučava sa više ili manje pretpostavki koje ola kšavaju proces analize.

Tečnosti i gasovi imaju zajedničko svojstvo da im je kohezija mala. Zbog toga se njihovi molekuli mogu lako pokretati. Zajedničko im je i svojstvo da se pritisak u tečnostima i gasovima prenosi podjednako na sve strane, zatim svojstvo potiska itd. Bitna je razlika konstantnost zapremine tečnosti, a promenljivost zapremine gasova što je isticano kod razgraničenja hidro i aerostatike. Obzirom da se kod strujanja gasova n[illegible] hova zapremina malo menja, uvešćemo i za njih pretpostavku o st[illegible] nosti zapremine, što će omogućiti zajedničko proučavanje hidro [illegible] aerodinamičkih pojava.

53. STRUJANJE FLUIDA. JEDNAČINA KONTINUITETA

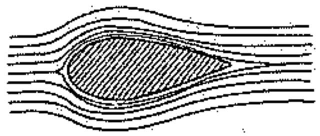
U mehanici čvrstog tela smo izučavali kretanje celog tela u odnosu na neki referentni sistem. Pri pomeranju fluida delovi fluida se kreću jedni u odnosu na druge i treba uvesti nove veličine za opisivanje ovakvog tipa kretanja. Zato ćemo pretpostaviti da je fluid nestišljiv i definisati pojam strujne linije i strujne cevi. *Strujne linije* ili strujnice su zamišljene linije duž kojih se kreću čestice fluida. Strujne linije možemo egzaktnije definisati kao krive linije kod kojih je tangenta u svakoj tački fluida kolinearna sa vektorom brzine (sl. 53.1). Strujnim linijama se, ustvari, opisuje trenutni raspored brzina delića fluida. Brzina čestice duž strujne linije menja se po veličini i po pravcu. Ako se svaka čestica koja se nadje u strujnoj liniji, nastavlja kretati u pravcu strujne linije kao i prethodna čestica, ili ako se slika strujnih linija u toku vremena ne menja, onda se za takvo strujanje kaže da je *stacionarno*. Drugim rečima, kod stacionarnog strujanja strujne linije se ne menjaju tokom vremena i poklapaju se sa putanjom čestica fluida. Stacionarni tok ne znači [illegible] menja brzina jedne čestice fluida u raznim tačkama

Sl. 53.1

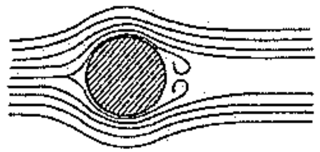
strujne linije. Zakrivljene strujne linije upravo opisuju takve promene.

Svaki fluid može strujati (proticati) stacionarno ako su ispunjeni opšti uslovi: da je brzina dovoljno mala i da su prepreke takve da ne uzrokuju suviše nagle promene brzine. Ako ovi uslovi nisu ispunjeni, strujanje fluida znatno je složenije i naziva se *turbolentno* strujanje.

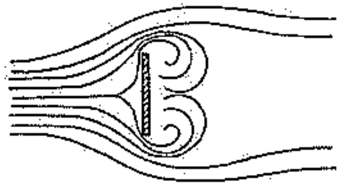
Delovanje prepreka na oblik strujnica prikazan je na slici 53.2. Oblik strujnica zavisi od oblika tela, pa strujnice imaju najpravilniji oblik kod tela u obliku ribe (sl. 53.2.a). Medjutim, kod tela oblika lopte, strujnice imaju sasvim drugi oblik (sl. 53.2.b). Iza tela nastaju vrtlozi (turbulencija), te strujnice nisu više paralelne. Naročito veliki vrtlozi nastaju kod ravne ploče (sl. 53.2.c).



a)



b)



c)

Sl. 53.2

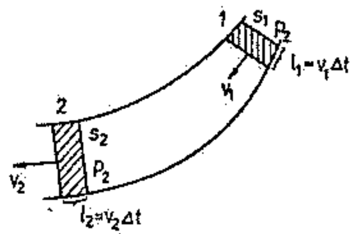
Strujna cev je deo fluida ograničen strujnim linijama. Iz ove definicije sledi da čestice fluida ne mogu da prolaze kroz omotač strujne cevi, te je broj delića u cevi stalan.

Uvešćemo još i pojam *idealnog* fluida. Idealnim fluidom zvaćemo neprekidnu sredinu koja je nestišljiva i kreće se bez unutrašnjeg trenja. Zapreminska masa idealnog fluida je stalna.

Strujanje idealnog fluida je uvek stacionarno jer je, kao što ćemo kasnije videti, unutrašnje trenje bitan preduslov za stvaranje vrtloga.

U realnim fluidima uvek postoji unutrašnje trenje kao posledica medjumolekularnih privlačnih sila. Uticaj ovog trenja na zakonitosti kretanja zavisi kako od vrste fluida tako i od ostalih uslova kretanja. Po pravilu se sa povećanjem brzine kretanja povećavaju i efekti trenja.

nestišljivog fluida (sl. 53.3). Ako se fluid na mestu označenom sa 1 pomakne za odredjeni pomak l_1, tada će se količina fluida pomaći u celini i na mestu označenom sa 2 fluid će se pomaći za pomak l_2. Zapremina tečnosti, koja za vreme Δt prodje kroz površine S_1 i S_2, može se napisati kao



Sl. 53.3

$$V_1 = S_1v_1\Delta t \quad \text{i} \qquad V_2 = S_2v_2\Delta t \qquad (53.1)$$

Kako je fluid nestišljiv zadržava stalnu zapreminu te je $V_1 = V_2$, pa iz (53.1) sledi

$$S_1v_1 = S_2v_2 = Sv = const. \qquad (53.2)$$

Dobijena jednačina predstavlja jednačinu kontinuiteta koja pokazuje da je proizvod iz preseka strujne cevi i brzine strujanja isti na svim mestima toka fluida. Jednačina (53.2) može da se dobije za bilo koja dva preseka. Otuda, sužavanjem strujne cevi se povećava brzina fluida i obrnuto, povećavanjem preseka strujne cevi brzina se smanjuje. Prema tome, fluid se ubrzava u smeru suženja strujne cevi, a to znači da u tom smeru dejstvuje sila, pa je jasno da je pritisak veći tamo gde je strujna cev šira. Znači, u strujnoj cevi pritisak je manji na mestima gde je brzina veća*.

Pri stacionarnom strujanju jednačina (53.2) je is-

---

* *Ovde i u daljem tekstu pojmovi manji ili veći pritisak odnose se isključivo na statički pritisak p.*

punjena bez obzira na nestišljivost, kao što to iz same definicije stacionarnog strujanja proizilazi. Medjutim, čak i pri nestacionarnom strujanju stišljivih fluida jednačina kontinuiteta (53.2) je približno ispunjena. Tako, na primer, kod avionskog krila pri umerenim brzinama nadpritisak ispod krila je svega 1% od atmosferskog pritiska. U praksi kod većine strujanja jednačina kontinuiteta zadovoljava ili sasvim ili približno.

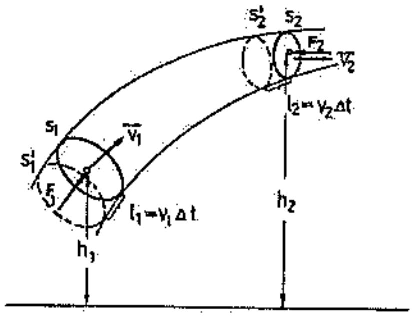
54. BERNULIJEVA JEDNAČINA

Ako se idealan fluid nalazi u polju sile Zemljine teže (strujanje je stacionarno), tada duž svake strujne linije važi zakon održanja ukupnog pritiska (zbir statičkog, dinamičkog i visinskog), koji je poznat pod nazivom Bernulijev* integral ili Bernulijeva jednačina.

Neka za vreme Δt kroz presek S_1 (brzinom v_1) i kroz S_2 (brzinom v_2) uske strujne cevi (sl. 54.1) protekne masa tečnosti Δm. Zapremina tog delića na oba preseka iznosi

$$V_1 = V_2 = \Delta m/\rho, \text{ tj.}$$

$$\Delta m = \rho S_1v_1\Delta t = \rho S_2v_2\Delta t \qquad (54.1)$$



Sl. 54.1

gde je ρ - zapreminska masa. Ako je brzina strujanja na početku bila v_1, a na kraju v_2, tada je promena kinetičke energije jednaka

$$E_k = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} \qquad (54.2)$$

Promena potencijalne energije dolazi od razlike visine fluida na presecima S_2 i S_1

$$E_p = \Delta mgh_2 - \Delta mgh_1 \qquad (54.3)$$

---

* *Daniel Bernoulli (1700-1782), švajcarski matematičar i fizičar iz znamenite porodice matematičara.*

Prema (54.2) i (54.3) promena energije uočene zapremine fluida iznosi

$$\Delta E = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1 \qquad (54.4)$$

Prema zakonu održanja energije, promena energije ΔE mora da bude jednaka radu spoljašnjih sila. Spoljašnje sile koje na fluid deluju su sile pritiska $F_1 = p_1 S_1$ i $F_2 = p_2 S_2$ te je rad ovih sila

$$\Delta A_1 = F_1 l_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \Delta V$$
$$\Delta A_2 = - F_2 l_2 = - p_2 S_2 v_2 \Delta t = - p_2 \Delta V \qquad (54.5)$$

Znak minus kod ΔA_2 uzet je zbog toga što je smer sile pritiska F_2 suprotan smeru pomeranja fluida. Na osnovu (54.5) ukupan rad je

$$\Delta A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \qquad (54.6)$$

gde je ΔV zapremina fluida.

Energetski bilans fluida zahteva da ukupan rad bude jednak promeni kinetičke i potencijalne energije, što prema (54.4) i (54.6) daje

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1$$

Podelimo li gornju jednačinu sa ΔV, uzimajući u obzir da je $\rho = \Delta m/\Delta V$ i prebacimo li sve članove sa istim indeksima na jednu stranu, dobijamo

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \qquad (54.7)$$

Kako se indeksi 1 i 2 mogu odnositi na bilo koje proizvoljne preseke S, to jednačina (54.7) može da se napiše kao

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const. \qquad (54.8)$$

Jednačina (54.8) naziva se Bernulijeva jednačina za strujanje

idealnog fluida. Ona govori o raspodeli pritiska duž strujne cevi i može se iskazati: *Kod stacionarnog strujanja nestišljivog fluida bez unutrašnjeg trenja, zbir statičkog p, visinskog $\rho g h$ i dinamičkog $\rho v^2/2$ pritiska duž uske strujne cevi ostaje stalan.*

Jednačina (54.8) je izvedena aproksimativno, tj. pod pretpostavkom da je brzina v_1 jednaka u svim tačkama preseka S_1 odnosno v_2 kod S_2, što nije tačno kada se radi o realnim fluidima. Kod realnih tečnosti zbog trenja, devijacije strujnica i dr. brzine nisu iste u svim tačkama jednog preseka, pa se za Bernulijevu jednačinu uvode različite korekcije koje uzimaju u obzir ovu činjenicu. Naime, ako se debljina strujne cevi smanjuje, brzine tačaka na presecima S_1 i S_2 će se sve manje razlikovati. U graničnom slučaju kada se strujna cev svede na strujnu liniju, Bernulijeva jednačina postaje tačna. Prema tome, Bernulijeva jednačina kod realnih fluida ne odnosi se na strujnu cev, već na strujnu liniju, u tom smislu što za svaku strujnu liniju na desnoj strani jednačine (54.8) stoji druga konstanta.

Potrebno je da se napomene da Bernulijeva jednačina važi i za stišljive fluide, ako su svi ostali uslovi ispunjeni, samo se ona ne može više izraziti u navedenom obliku već u integralnom.

55. PRIMENA BERNULIJEVE JEDNAČINE

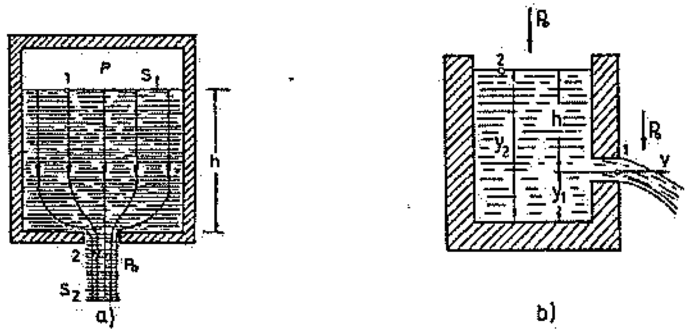
a. Brzina isticanja. Toričelijeva teorema. Na slici 55.1. prikazano je isticanje fluida iz suda, koji je napunjen fluidom do visine h, kroz pukotinu koja se nalazi na dnu suda. Neka je S_1 površina poprečnog preseka suda, a S_2 površina otvora kroz koji ističe tečnost i neka su v_1 i v_2 brzine u tačkama 1 i 2. Brzina v_2 naziva se brzinom isticanja. Primenjujući Bernulijevu jednačinu (54.7) na tačke 1 i 2 i uzimajući dno suda kao referentni nivo dobijamo

$$p + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

ili

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\frac{p - p_0}{\rho} + 2gh$$

Kada je sud otvoren prema atmosferi to u obe tačke 1 i 2 delu-



a) b)

Sl. 55.1

je atmosferski pritisak, tj. $p = p_0$ pa je $p - p_0 = 0$. Pretpostavimo takodje da je $S_1 >> S_2$. Tada je prema (53.2) v_1^2 mnogo manje od v_2^2 i može se zanemariti, te iz poslednje jednačine dobijamo brzinu isticanja

$$v_2 = \sqrt{2gh} \qquad (55.1)$$

Brzina isticanja je ista kao i brzina ma kojeg tela koje slobodno pada sa visine h. Izraz (55.1) izveo je 1644. godine Toričeli, pa je poznat pod imenom Toričelijeva teorema. Ona nije ograničena samo na otvor na dnu suda, već je primenljiva i na otvore na bočnim zidovima na visini h ispod površine. Tako za sud prikazan na slici 55.1.b. na osnovu (54.7) može se napisati za tačke 1 i 2 da je (zanemarujući brzinu v_2^2 i uzimajući dno suda kao referentni nivo)

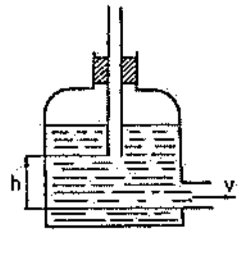
$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g y_1 = p_0 + \rho g y_2$$

ili nakon sredjivanja dobija se brzina isticanja v_1

$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} = \sqrt{2gh}$$

što je identično (55.1).

Na osnovu izvedene zavisnosti brzine isticanja od visine stubova tečnosti konstruisana je tzv. *Mariotova boca* (sl. 55.2). Kako je visina stuba u ovoj boci konstantna, tečnost iz nje ističe konstantnom brzinom sve dok nivo tečnosti u boci ne dodje ispod visine h. Ako se nivo tečnosti u boci spusti ispod otvora cevi, brzina postaje manja. Usled zbijanja strujnih linija pred otvorom poprečni presek mlaza produžava da se smanjuje još za kratko rastojanje iza otvora, dobijajući minimalni poprečni presek S_k koji se naziva suženim otvorom (*vena contracta*). Ako označimo sa S površinu kružnog bočnog otvora onda je



Sl. 55.2

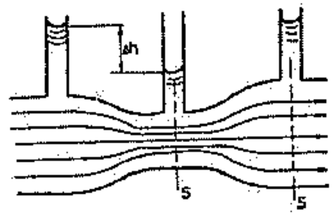
$$S_k = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 S = 0{,}65\ S$$

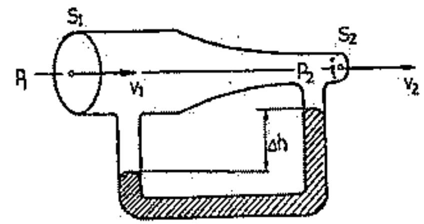
gde je $k = (\pi/4)^2 = 0{,}65$ koeficijent kontrakcije. Stepen kontrakcije mlaza zavisi od oblika otvora.

Za isticanje fluida iz suda kroz otvor proizvoljnog oblika površine S i koeficijenta kontrakcije k protok Q biće dat izrazom

$$Q = Skv = Sk\sqrt{2gh}$$

b. **Venturijeva cev.** Presek Venturijeve cevi prikazan je na slici 55.3.a. To je cev nejednakog preseka pomoću koje se





a) b)

Sl. 55.3

može se meriti količina protekle tečnosti u jedinici vremena. Venturijeva cev ima niz praktičnih primena u obliku dvostruke trube prikazane na slici 55.3.b. Primenom Bernulijeve jednačine na strujnu liniju koja prolazi kroz presek S_1 i S_2 dobija se za horizontalnu strujnu liniju

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \qquad (55.2)$$

odnosno

$$p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \qquad (55.3)$$

Kako je prema jednačini kontinuiteta

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_2 \qquad (55.4)$$

to je prema (55.3) i (55.4)

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \qquad (55.5)$$

Količina protekle tečnosti u jedinici vremena (protok) je

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S_1 v_1 = K\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \qquad (55.6)$$

gde je

$$K = S_1 S_2\sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}$$

Razliku pritisaka Δp merimo na manometru. Ako je ρ_0 zapreminska masa tečnosti u manometru, biće

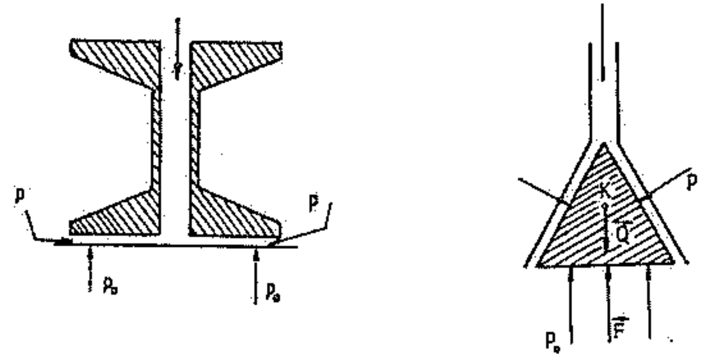
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_0 g \Delta h \qquad (55.7)$$

gde je Δh – razlika nivoa tečnosti u manometru.

Venturijeva cev služi za merenje protoka fluida u mnogim uredjajima (Venturijev vodomer)..

c. Aerodinamički paradoks. Duvamo li kroz kalem od konca,

stavljajući uz kalem parče hartije (sl. 55.4.a), primetićemo

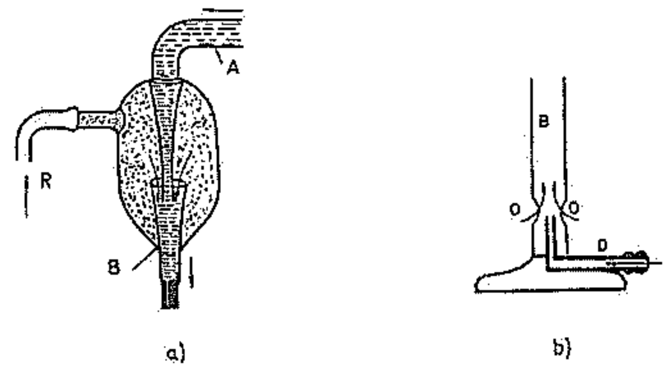


Sl. 55.4

da hartija neće odleteti već će ostati priljubljena uz kalem. Isti slučaj dogodiće se ako u levak (sl. 55.4) stavimo kupu od hartije. Ako kroz levak jako duvamo, kupa neće pasti usled svoje težine već će da se obrće i ostaje priljubljena uz levak. Za oba ogleda važi isto objašnjenje. Povećanjem preseka strujne cevi naglo se smanjuje brzina fluida (vidi 53.2). Na osnovu Bernulijeve jednačine (55.2) vidimo da se zbog toga naglo smanjuje pritisak p na mestu proširenja. Zbog toga razlika pritisaka $p_0 - p$ drži tela u strujnoj cevi.

d. Bunzenov šmrk (sl. 55.5.a) sastoji se od jedne zatvorene posude u koju ulazi cev A koja je sužena pri kraju. Na tu cev nadovezuje se druga cev B sa proširenim otvorom. Kad kroz cev A struji voda, na mestu suženja brzina se naglo povećava, tako da pritisak padne ispod atmosferskog. Zbog toga se kroz cev R može usisavati iz nekog suda vazduh ili tečnost koji zajedno sa vodom izlaze iz šmrka.

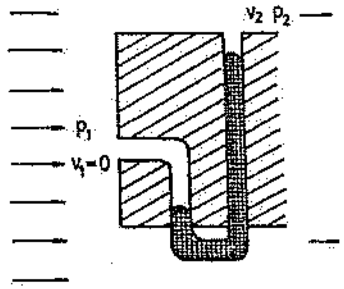
Na istom principu radi i Bunzenov plamenik (sl. 55.5.b). On se sastoji od jedne cevi B koja ima sa strane otvore O. U cev B ulazi tanja cev D koja na kraju ima uzanu diznu. Kroz diznu velikom brzinom izlazi gas usled čega se stvara podpritisak, te vazduh kroz otvor O ulazi i omogućuje potpuno



Sl. 55.5

sagorevanje.

e. Prandtlova cev. Pomoću Prandtlove cevi (sl. 55.6) meri se brzina kretanja tela u odnosu na fluid. Kako se na mestu 1 fluid zaustavlja, Bernulijeva jednačina za ovaj slučaj glasi



$$p_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \qquad (55.8)$$

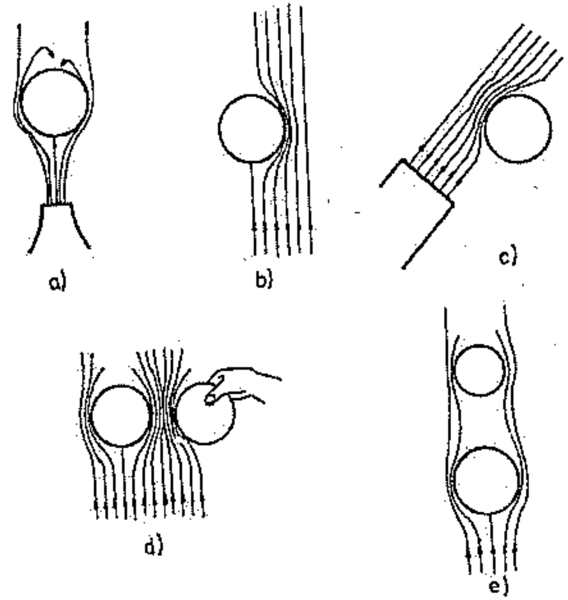
odakle je brzina fluida u odnosu na merni uredaj

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \qquad (55.9)$$

Sl. 55.6

f. Loptica koja lebdi. U vertikalnoj struji vazduha velike brzine pažljivo prinesemo stonotenisku lopticu. Struja vazduha će je "usisati" i nakon toga loptica će ostati da lebdi u struji vazduha. Objašnjenje za ove pojave dato je na slici 55.7.a. Kad lopticu približavamo struji vazduha u uskom prosto-

ru oko loptice vazduh se kreće brzinom v. Iza loptice brzina



Sl. 55.7

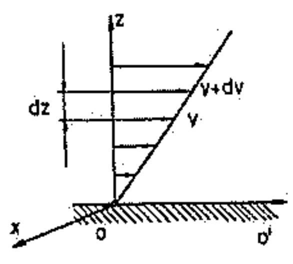
vazduha je veća nego ispred, pa prema Bernulijevoj jednačini (kad brzina raste pritisak opada) iza loptice se javlja smanjen pritisak, tako da razlika pritisaka vuče lopticu unazad. Vrtlozi koji se javljaju iza loptice (ili ma kojeg drugog tela) dejstvuju usisavajuće. Kad se jednom loptica nadje u struji vazduha uspostaviće se simetrično polje strujanja. Na lopticu deluju jednaki pritisci sa obe strane, te loptica miruje lebdeći u vazduhu (sl. 55.7.b) ili visi u vazduhu (sl. 55.7.c) ili se odigrava privlačenje i odbijanje dveju loptica (sl. 55.7.d. i e.).

56. STRUJANJE REALNOG FLUIDA

56.1. Viskoznost

Do sada smo posmatrali fluide (tečnosti i gasove) isključivo pod dejstvom spoljašnjih sila. Medjutim, na tečnosti i gasove deluju i druge sile koje dolaze od molekularne strukture fluida. Ove sile uzrokuju već poznate površinske pojave kod mirovanja fluida, a kod kretanja uzrokuju unutrašnje trenje.

Unutrašnje trenje ili viskoznost možemo zamisliti kao silu trenja kojom se jedan sloj tečnosti u kretanju tare o drugi. Molekuli svakog sloja deluju na susedan sloj silama koje su na tim udaljenostima po pravilu privlačne. Te sile nastoje da uspore i spreče medjusobno kretanje slojeva, odnosno deluju kao unutrašnje trenje. Viskoznost srećemo i kod gasova i kod tečnosti. Viskozne sile javljaju se i izmedju različitih materijala te utiču na otpor koji se javlja pri kretanju tela kroz fluid. Kretanje fluida sa unutrašnjim otporom prikazuje sl.56.1.



Sl. 56.1

Posmatramo laminarno (slojevito) kretanje fluida preko ravne površine 00'. Brzina fluida koji dodiruje površinu 00' je ravna nuli, dok dalji slojevi imaju sve veće brzine. Kako gornji delovi fluida imaju veću brzinu od onih ispod, izmedju njih se javlja trenje, tj. javlja se sila tako usmerena da koči slojeve koji se brže kreću, odnosno ubrzava one slojeve koji se sporije kreću. Ova sila naziva se sila viskoznog trenja. Veličina ove sile koja se opire relativnom kretanju bilo koja dva sloja upravno je srazmerna dodirnoj površini S izmedju slojeva i gradijentu brzine dv/dz*, tj.

$$F = \eta S \frac{dv}{dz} \qquad (56.1)$$

Jednačina (56.1) predstavlja Njutnov zakon viskoznog trenja. Ovaj zakon važi za sve homogene tečnosti, ali ne i za suspenzije i koloidne rastvore koji se stoga nazivaju "nenjutnovske" tečnosti. Konstanta proporcionalnosti η naziva se koeficijent

---

* *Gradijent brzine dv/dz je promena brzine po jedinici dužine u pravcu normalnom na tok fluida.*

viskoznosti. On predstavlja veličinu karakterističnu za svaku tečnost. Iz jednačine (56.1) sledi da je

$$\eta = \frac{F/S}{dv/dz} \qquad (56.2)$$

Ako se sve veličine u jednačini (56.2) izraze u jedinicama SI-sistema dobija se jedinica koeficijenta viskoznosti paskal-sekunda (*Pa·s*). *Paskal-sekunda je dinamička viskoznost homogenog fluida koji laminarno struji, u kojem izmedju dva ravna paralelna sloja sa razlikom u brzini od 1 metra u sekundi na rastojanju od 1 metra nastaje napon smicanja od 1 paskala.* Koeficijent izražen u paskal-sekundama naziva se apsolutni ili dinamički koeficijent viskoznosti. Pored ovog koeficijenta definiše se i koeficijent kinematičke viskoznosti v deobom dinamičkog koeficijenta sa zapreminskom masom, tj.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Jedinica koeficijenta kinematičke viskoznosti u SI-sistemu je m^2/s. *Kvadratni metar u sekundi je kinematička viskoznost homogenog fluida čija je dinamička viskoznost 1 paskal-sekunda, a zapreminska masa 1 kilogram po kubnom metru.*

Sa porastom temperature koeficijent viskoznosti tečnosti brzo opada, u proseku 2-2,5% po stepenu. Nasuprot tome, kod gasova viskoznost raste sa temperaturom. Ovo se objašnjava intenzivnijim kretanjem molekula gasa, tj. njihovim učestalim prelascima iz jednog sloja fluida u drugi. Prema rezultatima molekularno-kinetičke teorije gasova koeficijent viskoznosti gasova η je veličina upravno srazmerna kvadratnom korenu iz apsolutne temperature.

U praksi se viskoznost nekih tečnosti, na primer, ulja za podmazivanje strojeva, izražava pomoću tzv. SAE* jedinica. Ulje viskoznosti 10 SAE jedinica ima koeficijent viskoznosti od 10-22 *Pa·s*; 20 SAE jedinica odgovara koeficijentu od 23-30 *Pa·s*; 30 SAE jedinica koeficijentu od 36-43 *Pa·s* itd. Tipične vrednosti koeficijenta viskoznosti za tečnosti date su u tablici 56.1. Jasno je da je za idealan fluid $\eta = 0$, dok bi na-

---

* *SAE - Society of Automotive Engineering.*

protiv za idealno kruto telo bilo $\eta = \infty$.

TABELA 56.1.

Fluid	η [Paskal-sekunda]
etar	0,00025
voda	0,0011
alkohol	0,0013
glicerin	1,1
ricinusovo ulje	1,1
vazduh	0,000018

56.2. Rejnoldsov broj. Preslikavanje

Iskustvo pokazuje da strujanje može da ima stacionaran ili turbolentan karakter, što odredjuje kombinacija četiri faktora: zapreminske mase ρ, viskoznosti η, brzine strujanja v i prečnika cevi D. Ta kombinacija poznata je pod imenom Rejnoldsovog* broja i jednaka je

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta} \qquad (56.3)$$

Treba napomenuti da je brzina v u izrazu (56.3) prosečna brzina proticanja kroz cevi, jer je brzina proticanja u sredini cevi veća od one pri zidovima cevi. Rejnoldsov broj je čisti broj, tj. bezdimenzionalna veličina. Eksperiment pokazuje da je za vrednosti Rejnoldsovog broja $N_R < 2000$ proticanje stacionarno. Za vrednost N_R izmedju 2000 i 3000 stacionarni i turbulentni način proticanja se mešaju. Za N_R iznad 3000 proticanje je turbulentno. Tako je, na primer, za vodu pri 20^0C, koja protiče kroz cev prečnika 2 *cm*, strujanje stacionarno ako je

---

* *Osborne Reynolds (1842–1912), engleski fizičar i pronalazač. Istakao se radovima iz primenjene hidrodinamike. Medju pronalascima usavršio je hidrauličnu kočnicu.*

$$N_R = \frac{10^3 \cdot v \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{0{,}001} < 2000$$

ili

$$v < 0{,}1 \ m/s$$

Pri brzinama većim od 10 *cm/s* proticanje bi bilo turbulentno. Medjutim, granična brzina prestanka stacionarnog strujanja pri proticanju vazduha kroz istu cev bila bi tek ($\eta = 181 \cdot 10^{-7} Pa \cdot s$, $\rho = 1{,}3 \ kg/m^3$, $D = 2 \cdot 10^{-2} m$) kod brzine

$$v > \frac{2000 \cdot 181 \cdot 10^{-7}}{1{,}3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}$$

$$v > 1{,}39 \ m/s$$

Značaj Rejnoldsovog broja ogleda se naročito kod tzv. teorije preslikavanja. Svako proticanje sa istim Rejnoldsovim brojem ponaša se jednako, bez obzira na fluid koji protiče, brzinu ili prečnik cevi. Na taj način ispitivanje pojava pri proticanju možemo izvesti i na modelima koji imaju isti Rejnoldsov broj, a eksperimentalno ih je jednostavnije realizovati. Ovim se svojstvom proticanja zato veoma mnogo koristimo u praksi.

56.3. Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

Bernulijeva jednačina (54.8) opisuje proticanje idealnog fluida kroz cev. Kod izvodjenja te jednačine uzeli smo u obzir da na fluid deluje isključivo sila teže. Medjutim, na realne fluide deluju i medjumolekularne sile koje se manifestuju kao viskoznost. Delovanje tih sila mora se dakle pokazati i u jednačini koja opisuje proticanje realnih fluida kroz cevi. Otuda i rad potreban za proticanje realnih fluida kroz cevi biće veći nego kod realnih fluida.

Napišimo Bernulijevu jednačinu (54.7) u obliku

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \qquad (56.4)$$

Ovako napisana Bernulijeva jednačina kaže da je za proticanje idealne tečnosti kroz cev potrebna razlika pritisaka ($p_1 - p_2$) koja ide na savladjivanje razlike u visinama i hidrodinamičkog pritiska. Medjutim, viskoznost takodje stvara otpor proticanju fluida, te će biti potrebna veća razlika pritisaka ($p_1 - p_2$) da se uz iste uslove pomakne realna tečnost, nego da se pomakne idealna tečnost. To povećanje razlike pritisaka ogledaće se u pojavi jednog dodatnog člana u jednačini (56.4). Za specijalan slučaj cilindrične cevi preseka D i dužine L kroz koju protiče fluid jednolikom brzinom v (tj. $v_1 = v_2$) taj dodatni član iznosi

$$p = f \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} v^2 \qquad (56.5)$$

pa Bernulijeva jednačina u tom slučaju glasi

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + f \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} v^2 \qquad (56.6)$$

Faktor *f* je bezdimenziona veličina koja zavisi od Rejnoldsovog broja N_R, a naziva se faktor trenja. Za stacionarno strujanje ($N_R < 2000$) je

$$f = \frac{64}{N_R} \qquad (56.7)$$

a za turbulentno strujanje f opada nešto sporije sa porastom N_R. Faktor f u izrazu (56.7) važi samo za glatke cevi.

56.4. Proticanje fluida kroz uske cevi. Poazejev zakon

Posebno važan slučaj viskoznog kretanja fluida je proticanje kroz cevi. Teoriju ovog procesa dao je Poazej*, pa se i jednačina koja objašnjava proticanje naziva Poazejeva jednačina. Da bi se ova jednačina izvela posmatra se laminarno proticanje nestišljivog fluida kroz cev dužine l i poluprečnika R, a pod dejstvom razlike pritisaka ($p_1 - p_2$) (sl. 56.2). Da bi proticanje bilo laminarno, potrebno je da cev bude dovoljno uzana, a brzina proticanja relativno mala, odnosno da razlika pritisaka ne bude suviše velika. Pri ovakvom kretanju

---

* *Jean Poiseuille (1799–1869), francuski fizičar i filozof.*

tečnosti može se zamisliti da se tečnost deli u cilindrične slojeve koji se kreću u istom smeru, ali različitim brzinama jedan u odnosu na drugi. Ova brzina raste od zidova, gde je nula, ka osi cevi, gde je maksimalna. Neka jedan takav cilindrični sloj na rastojanju r ima brzinu v. Na ovaj cilindar deluje viskozna sila, koja prema jednačini (56.1), iznosi

$$F = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

Kako je pritisak definisan kao sila po jedinici površine, to je sila koja deluje na fluid i pokreće ga

$$F = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Kada je kretanje stacionarno, tj. kada se tečnost protičući kroz cev ni na jednom mestu ne ubrzava, sila pritiska mora biti u ravnoteži sa silom viskoznog trenja. Kako ubrzanja nema, zbir sila koje deluju na posmatran sistem jednak nuli

$$\eta 2\pi r l \frac{dv}{dt} + \pi r^2 (p_1 - p_2) = 0$$

ili

$$-2\eta l dv = (p_1 - p_2) r dr$$

Nakon integracije dobija se

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + const. \qquad (56.8)$$

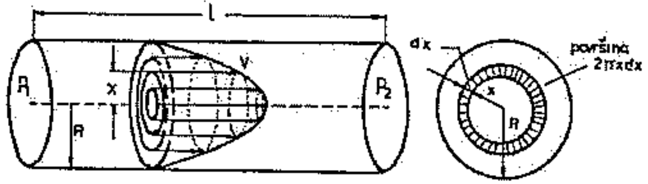
Integraciona konstanta odredjuje se iz početnih uslova, gde je za r = R, v = 0. Kada se uzme u obzir početni uslov, izraz (56.8) glasi

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \qquad (56.9)$$

Jednačina (56.9) daje zavisnost brzine kretanja sloja tečnosti od rastojanja r od ose cevi. Raspodela brzine je parabolična kao što je prikazano na slici 56.2. Da bi se odredila ukupna količina tečnosti koja protekne kroz cev za vreme τ mora se izvršiti integracija svih elemenata (od 0 do R) površine $2\pi r dr$ (sl. 56.2)

$$V = \int_0^R 2\pi r v \tau dr$$

Zamenom izraza za brzinu (56.9) i integracijom dobija se zapre-



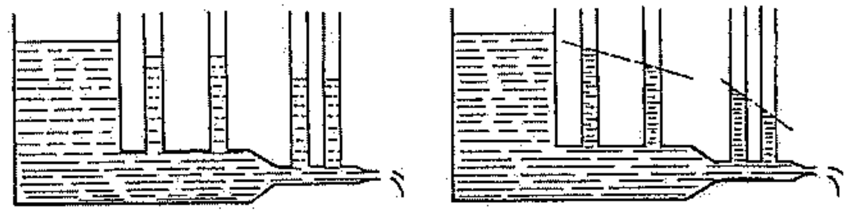
Sl. 56.2

mina tečnosti V koja protekne kroz cev poluprečnika R i dužine l za vreme τ

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)\, R^4 \tau}{8 l \eta} = \frac{\pi \Delta p R^4 \tau}{8 l \eta} \qquad (56.10)$$

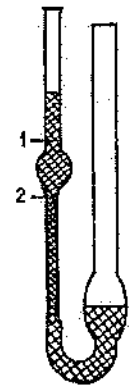
Ovo je Poazejev zakon, koji važi samo za nestišljive fluide. Jednačina (56.10) pokazuje da je zapremina fluida koja protekne kroz tanku cev upravno srazmerna četvrtom stepenu poluprečnika cevi R^4, gradijentu pritiska $\Delta p/l$ duž cevi i vremenu proticanja τ, a obrnuto srazmerna koeficijentu viskoznosti fluida η; Poazej je do ovog zakona došao zapravo fiziološkim ispitivanjem proticanja krvi kroz kapilare i faktora koji utiču na širenje kapilara (npr. alkohola).

Prema (56.8) sledi da kod viskoznog fluida postoji pad pritiska čak i kod proticanja duž horizontalne cevi konstantnog poprečnog preseka. Ovaj stav se može pokazati na horizontalnoj cevi sa manometrima kroz koju ističe tečnost iz suda za slučaj idealnog fluida (bez viskoznosti) (sl. 56.3.a) i viskoznog fluida (sl. 56.3.b). Pomoću Poazejeve jednačine (56.10) može se odrediti koeficijent viskoznosti. Uredjaj za ovo merenje zove se protočni viskozimetar. U praksi se najčešća koristi Ostvaldov (*Ostwaldov*) protočni viskozimetar (sl. 56.4).



a) b)

Sl. 56.3



Sl. 56.4

56.5. Otpor viskozne sredine. Stoksov zakon

Kada se neko telo kreće kroz fluid, nailazi na otpor sredine. Ako je brzina kretanja tela mala i ako pri kretanju nema vrtloga, taj otpor potiče od sila viskoznog trenja. Teorija daje da je sila otpora sredine (unutrašnjeg trenja) upravno srazmerna prvom stepenu brzine kretanja tela

$$F = kv$$

gde je k koeficijent srazmernosti koji zavisi od oblika i dime nzija tela koje se kreće, kao i od koeficijenta viskoznosti sredine. Stoks* je odredio ovu konstantu za tela sfernog oblika i dobio je

$$k = 6\pi\eta r$$

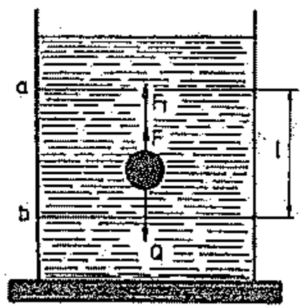
gde je η koeficijent viskoznosti, a r poluprečnik kuglice koja se kreće. Sila otpora sredine, prema tome, dobija oblik

$$F = 6\pi\eta r v \qquad (56.11)$$

Ovo je Stoksova formula, koja primenjena na kretanje kuglice u viskoznoj sredini, omogućuje odredjivanje koeficijenta viskoznosti te sredine.

Posmatrajmo slobodno padanje kuglice mase m i radijusa r u viskoznoj sredini η (sl. 56.5). Na nju dejstvuju tri sile: težina Q, sila potiska F_p i sila otpora sredine F (Stoksova sila). Rezultujuća sila R koja dejstvuje na kuglicu je

$$R = Q - (F + F_p)$$



Sl. 56.5

Ukoliko početna brzina kuglice nije velika, posle prelaska puta od oko jednog santimetra u fluidu može se smatrati da je brzina kretanja kuglice v postala konstantna veličina. Tada se kuglica kreće bez ubrzanja, tj. ubrzanje kuglice je nula, pa mora biti i R = 0, te je

$$Q = F + F_p \qquad (56.12)$$

---

*Georg Stokes (1819–1903), irski matematičar i fizičar, poznat po svojim radovima iz teorijske hidrodinamike i fluorescencije.

Na osnovu Njutnovog zakona je

$$Q = mg = \rho V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

a na osnovu Arhimedovog zakona

$$F_p = m_l g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g$$

gde je ρ zapreminska masa kuglice, a ρ_l zapreminska masa tečnosti. Zamenom odgovarajućih veličina u jednačinu (56.12) dobija se

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g$$

odnosno

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_l)}{9v} \qquad (56.13)$$

Merenjem vremena padanja kuglice τ na dužini l dobija se brzina $v = l/\tau$. Ako se merenja izvode uvek sa kuglicom istog (poznatog) poluprečnika r i na istoj dužini padanja l pogodno je da se izraz (56.13) prepiše u obliku

$$\eta = k(\rho - \rho_l)\tau \qquad (56.14)$$

gde je

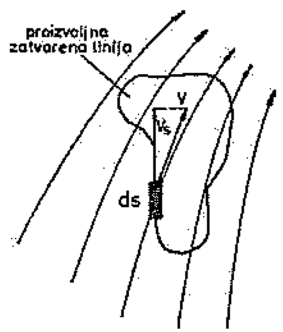
$$k = 2r^2 g/9l$$

te da se merenjem vremena padanja kuglice τ odredjuje koeficijent viskoznosti za razne tečnosti. Ovo je princip rada Heplerovog (*Höppler*) viskozimetra.

56.6. Dinamički potisak

Tela koja su lakša od vode plivaju po površini. Isto tako se i tela koja su lakša od vazduha podižu u visinu. Sila koja ih podiže je potisak, koji je jednak težini istisnutog fluida. Ta se sila naziva i statički potisak, a dolazi od toga što hidrostatički pritisak u fluidu raste s dubinom. Medjutim, avion koji leti ne održava se zbog statičkog potiska: avion koji se ne kreće odmah padne. Prema tome, uzrok potisku koji drži avion u vazduhu povezan je sa kretanjem. Zato ćemo ovu vrstu potiska nazvati dinamički potisak.

Prema Bernulijevoj jednačini na telo koje se relativno kreće prema fluidu deluje tzv. hidrodinamički pritisak. Ako je kretanje fluida simetrično prema telu, pritisak se s obe strane poništava. Medjutim, ako je tok fluida takav da je brzina proticanja iznad tela veća od one ispod tela, tada će prema Bernulijevoj jednačini postojati rezultantna sila prema gore, odgovorna za dinamički potisak. Asimetričan tok fluida oko tela možemo matematički dobiti tako da na prvobitni simetrični tok superponiramo kružni tok. Taj ćemo kružni tok karakterisati veličinom koju ćemo nazvati cirkulacija. Neka je $d\vec{s}$ element zatvorene krive u polju fluida koji se kreće, a v_s komponente brzine fluida u smeru elementa ds (sl. 56.6). Tada



Sl. 56.6

ćemo cirkulaciju definisati krivolinijskim integralom skalarnog proizvoda $\vec{v}\cdot d\vec{s}$

$$\Gamma = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint v_s ds \qquad (56.15)$$

Fizičko značenje cirkulacije je u tome što ona meri asimetriju strujanja, tj. koliko je, na primer, brzina fluida s jedne strane tela različita od brzine fluida s druge strane. Cirkulacija pri simetričnom strujanju očito je jednaka nuli. Uzmimo, s druge strane, valjak koji se okreće oko svoje ose u viskoznom fluidu. Brzina strujanja fluida sledi obrtanje valjka i lako se vidi da je

$$v = k\frac{l}{r}$$

tj. da brzina strujanja opada linearno s udaljenošću od ose valjka. (Takvo kružno strujanje opažamo, npr. pri isticanju vode kroz otvor na dnu bazena.) Razmotrimo cirkulaciju po kružnoj putanji radijusa r. Kako brzina ima smer tangente na kružnicu, to je

$$\Gamma = \int v_s ds = \frac{k}{r}\int ds = \frac{k}{r}2\pi r = 2\pi k$$

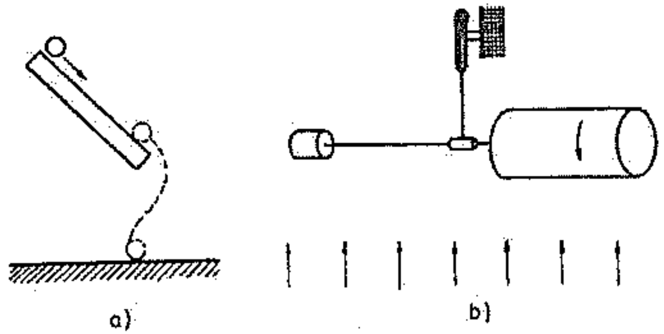
Cirkulacija je dakle različita od nule i jednaka po svakoj kružnici proizvoljnog radijusa. Može se pokazati da će ona biti jednaka po ma kojoj zatvorenoj krivoj oko ose valjka.

Kako cirkulacija meri nesimetriju strujanja oko prepreke, vrednost $\Gamma \neq 0$ znači različitu brzinu strujanja s obe strane prepreke. Prema Bernulijevoj jednačini će postojati razlika u pritiscima izmedju jedne i druge strane prepreke, tj. na prepreku će delovati sila normalna na smer nesmetanog strujanja. Za valjkastu prepreku koja rotira u fluidu koji se kreće brzinom v sila potiska F normalna na smer strujanja iznosi

$$F_\perp = \rho v L \Gamma \qquad (56.16)$$

gde je L dužina valjka, a ρ zapreminska masa fluida.

Pojava da na rotirajući cilindar koji je uronjen u homogenu struju tečnosti (ili se jednoliko kreće po fluidu) deluje sila normalna na nesmetani smer homogenog strujanja naziva se Magnusov efekat. Tu ćemo pojavu jednostavno ilustrovati ogledom prikazanim na slici 56.7. Lagani valjak od papira polako se kotrlja niz kosinu. Relativna brzina valjka prema fluidu (vazduhu) - što je ekvivalentno kretanju fluida prema valjku - s gornje strane valjka manja je nego s donje strane. Dakle, pritisak je iznad valjka veći od pritiska ispod valjka,



Sl. 56.7

što rezultuje u sili koja gura valjak pod dasku. Još ćemo očitije prikazati Magnusov efekat pomoću kanala za vetar. Valjak na slici 56.7.b. može da se vrti oko svoje horizontalne ose koja je pričvršćena na vertikalnu osu. Zavrtimo valjak oko vlastite ose i postavimo ga u homogenu struju vazduha. Magnusova sila gura valjak normalno na smer strujanja vazduha i on se počne okretati oko vertikalne osovine.

Na sličnom principu deluje i avionsko krilo. Krilo ima takav oblik da je strujanje vazduha ispod krila sporije nego iznad krila. Ta nesimetrija u strujanju daje rezultujuću silu prema gore (pritisak ispod krila je veći) što pri velikim brzinama podigne avion.

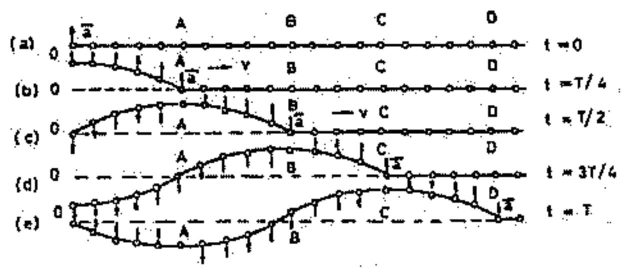
XII TALASNO KRETANJE

57. PROSTIRANJE TALASA U ELASTIČNOJ SREDINI

Ako se jedna tačka elastične sredine izvede iz ravnotežnog položaja počeće da osciluje i energiju oscilovanja će predati delićima svoje okoline. Ovakvo širenje oscilatornog poremećaja u elastičnoj sredini naziva se talasom. Pri prostiranju talasa kroz elastičnu sredinu se ne premeštaju delići sredine, već oni samo osciluju oko svojih ravnotežnih položaja, a kroz sredinu se prenosi energija talasa.

Ako je pravac oscilovanja delića normalan na pravac prostiranja talasa, talas je *transverzalan*, a ako delići osciluju duž pravca prostiranja talasa, talas je *longitudinalan*. Transverzalni talasi se mogu javiti samo u onim sredinama u kojim postoje elastične sile smicanja (kod čvrstih tela). U tečnim i gasovitim sredinama se prenose samo longitudinalni talasi, koji se prostiru razredjivanjem i zgušnjavanjem sredine.

Na slici 57.1. je prikazan jedan niz čestica (npr. niz atoma u čvrstom telu) i na njemu će detaljnije biti razmo-



Sl. 57.1

tren mehanizam prostiranja transverzalnih talasa. Deo (a) iste slike prikazuje ravnotežne položaje čestica. Ako se pod dejstvom sile čestica O pomeri naviše iz ravnotežnog položaja, ona će,